
Aufgabe 1 *(Berechnung der Determinante)*
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 *(Rang-Eins Störung von* $\mathrm{E_n}$*)*
Für $a, b \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \langle b, x \rangle a$. Zeigen Sie:

(1) F ist eine lineare Abbildung vom Rang Eins.

(2) Die Matrix von F lautet $F_{ij} = a_i b_j$.

(3) Es gilt $\det(\mathrm{E_n} + F) = 1 + \langle a, b \rangle$.

Aufgabe 3 *(Ableitung der Determinante))*
Für $A \in C^0(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $I = (a, b)$, sei $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine gegebene Lösung der Gleichung $X'(t) = A(t)X(t)$ für alle $t \in I$. Folgern Sie

$$\frac{d}{dt} \det(X) = \operatorname{tr}(A(t)) \det(X(t)).$$

Hinweis. Betrachten Sie die Zeilen von X und verwenden Sie Serie 1, Aufgabe 3.

Aufgabe 4 *(Transformation des Kreuzprodukts)*
Zeigen Sie für $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ invertierbar und $x, y \in \mathbb{R}^3$ die Formel

$$(Ax) \times (Ay) = \det(A)(A^{\mathrm{T}})^{-1} x \times y.$$

Ist $\det(A) = 1$ und $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = A$, so folgt also $(Ax) \times (Ay) = A(x \times y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie weiter, dass der umgekehrte Schluss auch stimmt.
Hinweis: Betrachten Sie $\langle (Ax) \times (Ay), Az \rangle$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 29.4.2013, vor der Vorlesung.